Relativistische Wellenlänge für ein Elektron

Es gilt: $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$

mit m: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ folgt: $\boxed{\lambda = \frac{h \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_{0.} \cdot v}}$

Gesucht: Formel für λ, die von der Geschwindigkeit unabhängig ist.

Es gilt: Wges= m_0c^2+W_{kin} =m_oc^2+eU
also:

$$\boxed{\frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 \cdot c^2 + eU}$$

Kehrwert; x m_oc^2; quadrieren, führt zu:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - (\frac{m_oc^2}{eU + m_oc^2})^2$$

$$v = c\sqrt{1 - (\frac{m_oc^2}{eU + m_oc^2})^2}$$

Aus $\lambda = \frac{h \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m_{0.} \cdot v}$ soll werden:

die relativistische Formel für λ : $\lambda_{rel} = \frac{h}{\sqrt{\frac{e^2U^2}{c^2} + 2m_0eU}}$

setze: m_oc^2=a; eU=b

dann wird: $\lambda = \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2}}$

führt zu: $\lambda = \frac{h}{m_0 c} \cdot \sqrt{\frac{a^2 (b+a)^2}{(b+a)^2 (b^2 + 2ab)}}$

kürzen, a und b ersetzen, m_0c unter die Wurzel ziehen, dann folgt der Ausdruck für λ der von der Geschwindigkeit unabhängig ist.

$$\lambda_{rel} = \frac{h}{\sqrt{\frac{e^2 U^2}{c^2} + 2 m_0 e U}}$$

Lösung
Schritt 1:
Herleiten der Formel für die Geschwindigkeit:

$$\frac{m_o c^2}{\sqrt{\;}} = m_o c^2 + eU \Big| Kehrwert$$

$$\frac{\sqrt{\;}}{m_o c^2} = \frac{1}{m_o c^2 + eU} \Big| m_o c^2$$

$$\sqrt{\;} = \frac{m_o c^2}{m_o c^2 + eU} \Big| quadrieren$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_o c^2}{m_o c^2 + eU}\right)^2 \Big| c^2, \cdot -1$$

$$-c^2 - v^2 = -c^2\left(\frac{m_o c^2}{m_o c^2 + eU}\right)^2 \Big| c^2 ausklammern$$

$$v^2 = c^2\left[1 - \left(\frac{m_o c^2}{m_o c^2 + eU}\right)^2\right]$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_o c^2}{m_o c^2 + eU}\right)^2}$$

Um die Wellenlänge herzuleiten wird v zu:

$$v^2 = c^2\left[1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2\right]$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2}$$

Jetzt alles in die Formel für λ einsetzen: